Localização de um anel R num conj. multiplicativo S

$$\varphi_S : R \longrightarrow S^{-1}R$$

Notação: elementos de $S^{-1}R$: $\frac{x}{s}$, $x \in R$ $s \in S$.

$$\varphi_S(x) = \frac{x}{1}$$

Exemplos: 1. $S_0 \equiv$ conj. dos não divisores de zero

2. Se R é domínio, $S_0 = R - \{0\}$ e $S_0^{-1}R = \mathrm{Frac}(R)$

NB: $\ker \varphi_S = \{x \in R \mid \varphi_S(x) = 0\}$
$= \{x \in R \mid \exists s \in S : xs = 0\}$

Teorema (PU de $S^{-1}R$): Dado $\varphi \in Hom(R,R')$ temos $\varphi(S) \subset (R')^{\times}$ sse $\exists!\, \rho \in Hom(S^{-1}R, R')$ tq

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi_S"] \arrow[dr, "\varphi"'] & S^{-1}R \arrow[d, dashed, "\exists!\,\rho"] \\ & R' \end{tikzcd}$$

comuta.

Se ρ existe, $\ker \rho = \ker \varphi \, S^{-1}R$

Cor: $\varphi_S : R \xrightarrow{\cong} S^{-1}R$ sse $S \subset R^{\times}$.

Exemplo: $R = R' \times R'' \Rightarrow R' = S^{-1}R$ com $S = \{(1,1),(1,0)\}$.

Notação: $f \in R$, $S_f = \{f^n \mid n \geq 0\}$
$\Rightarrow R_f := S_f^{-1}R$ é a chamada localização

de R em f. φ_{S_f} é denotado φ_f.

<u>Prop</u>: $R_f = R[x]/\langle 1 - fx \rangle$

<u>Dem</u>: Mostrar que R_f tem a PU da localização.

$\square$

<u>Def</u>: A saturação de $\mathfrak{a} \subset R$ relativa/ a conj. mult. S é

$$\mathfrak{a}^S := \{ a \in R \mid \exists_{s \in S} : sa \in \mathfrak{a} \}$$

Se $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^S$, diz-se que $\mathfrak{a}$ é saturado (S-saturado).

Prop: $S \subset R$ molt. $\mathfrak{a} \subset R$ ideal, então

(1) $\ker \varphi_S = \langle 0 \rangle^S$ (2) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^S$

(3) $\mathfrak{a}^S$ é um ideal.

Prop: $S \subset R$ molt.

(1) Se $\mathfrak{b} \subset S^{-1}R$ ideal, então

(a) $\varphi_S^{-1}\mathfrak{b}$ é saturado (b) $\mathfrak{b} = \varphi_S^{-1}\mathfrak{b}\, S^{-1}R$

(2) Se $\mathfrak{a} \subset R$ é ideal, então

(a) $\mathfrak{a} S^{-1}R = \mathfrak{a}^S S^{-1}R$; (b) $\varphi_S^{-1}(\mathfrak{a} S^{-1}R) = \mathfrak{a}^S$

(3) $\mathfrak{p} \subset R$ ideal primo e $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, então

(a) $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^S$ (b) $\mathfrak{p} S^{-1}R$ é primo

Cor: (1) $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}S^{-1}R$ é uma bijeção entre ideais saturados de R e ideais de $S^{-1}R$

(2) $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}S^{-1}R$ é bijeção entre primos $\mathfrak{p}$ de R t.q. $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ e os ideais primos de $S^{-1}R$.

Inversas:

$$\mathfrak{b} \mapsto \varphi_S^{-1}\mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{q} \mapsto \varphi_S^{-1}\mathfrak{q}$$

Notação: Se $\mathfrak{p} \subset R$ é primo

$$S_{\mathfrak{p}} := R - \mathfrak{p}$$

a $S_{\mathfrak{p}}^{-1}R$ chamamos localização em $\mathfrak{p}$

$$R_{\mathfrak{p}} := S_{\mathfrak{p}}^{-1}R$$

$$\varphi_{\mathfrak{p}} := \varphi_{S_{\mathfrak{p}}}$$

Prop: Se $\mathfrak{p}$ é primo, $R_{\mathfrak{p}}$ é um anel local com maximal $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$.

Localização de R-álgebras

Se $S \subset R$ conj. mult. e se R' é R-alg. definimos $S^{-1}R'$ como

$$R' \times S \, / \sim$$

onde $(x,s) \sim (y,t)$ sse

$$\exists s' \in S : s'(tx - sy) = 0$$

Mesma notação para elementos de $S^{-1}R'$: $\frac{x}{s}$, $x \in R'$, $s \in S$. Temos em $S^{-1}R'$ as operações

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} := \frac{tx + sy}{st}$$

$$\frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} := \frac{xy}{st}$$

$$u \cdot \frac{x}{s} := \frac{ux}{s}, \quad u \in R,\ x \in R',\ s \in S$$

Com estas operações, $S^{-1}R'$ é uma R-álgebra.

Definimos $\varphi_S : R' \longrightarrow S^{-1}R'$

por $\varphi_S(x) := \frac{x}{1}$

φ_S é um morfismo de R-álgebras

$\therefore$ $S^{-1}R'$ é R'-álgebra

tq. $\varphi_S(S) \subset (S^{-1}R')^{*}$

PU de $S^{-1}R'$: $S^{-1}R'$ é inicial entre as R'-álgebras em que os elementos de S são enviados em unidades:

$$\begin{tikzcd}
R' \arrow[r, "\varphi_S"] \arrow[dr, "\psi"'] & S^{-1}R' \arrow[d, dashed, "\exists!\,\rho"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& R''
\end{tikzcd}$$

$\psi(S) \subset (R'')^\times$

i.e., se $\psi : R' \to R''$ é tq. $\psi(S) \subset (R'')^\times$ então $\exists!\, \rho$ que faz comutar o diagrama.

Se $\tau : R' \to R''$ é morfismo de R-álgebras, obtemos $S^{-1}\tau : S^{-1}R' \to S^{-1}R''$ tq. o diagrama

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varphi_S"'] & R'' \arrow[d, "\varphi'_S"] \\ S^{-1}R' \arrow[r, dashed, "\exists! S^{-1}\tau"] & S^{-1}R'' \end{tikzcd}$$

pois $\varphi'_S \circ \tau$ envia S em invertíveis.

Prop: Seja $S \subset R$ mult. e $T' \subset S^{-1}R$ mult. e $T = \varphi_S^{-1}(T')$. Se $S \subset T$ então

$$(T')^{-1}S^{-1}R = T^{-1}R$$

Dem: Segue da PU.

Def: Um anel R diz-se decomponível se $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$, com R_i anel local $\forall i$.

Exemplo: $\mathbb{C}[x]/\langle x^2+1\rangle$

$$\simeq \mathbb{C}/\langle x+i\rangle \oplus \mathbb{C}/\langle x-i\rangle$$

$$= \mathbb{C}/\langle x+i\rangle \times \mathbb{C}/\langle x-i\rangle$$

$$= \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$ é decomponível.

Prop: Seja R um anel decomponível

$$R = \prod_{i=1}^{n} R_i$$

com R_i local. Então R tem exat/ n ideais maximais $m_1, \dots, m_n$ e

$$R_i = R_{m_{\sigma(i)}}$$

para algum $\sigma \in S_n$.

<u>Dem</u>: Seja $\eta_i \subset R_i$ o ideal maximal.

SPG

$$m_i = \eta_i \times \prod_{j \neq i} R_j$$

Seja $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ base canónica e $S_i = \{1, e_i\}$

Temos $S_i^{-1} R = R_i$ e $\varphi_{S_i} : R \to R_i$

é a projeção no i-ésimo factor.

Temos $\varphi_{S_i}^{-1}(R_i - \eta_i) = R - m_i$

$\therefore R_i = S_i^{-1} R = R_{m_i}$

$\blacksquare$

Localização de Módulos: $M \in R\text{-mod}$

$S \subset R$ multiplicativo

Def: A localização de M e S, $S^{-1}M$, define-se como:

$$S^{-1} = M \times S / \sim$$

com $(m, s) \sim (m', s') \iff$

$$\exists_{s'' \in S} : s''(s'm - sm') = 0$$

Notação: classe de $(m, s) := \frac{m}{s}$

NB: $S^{-1}M \in S^{-1}R\text{-mod}$ com

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} := \frac{am}{st}$$

NB: Temos $\varphi_S \in \mathrm{Hom}_R(M, S^{-1}R)$

dada por $\varphi(m) := \dfrac{m}{1}$

Exemplo: 1. $\mathfrak{a} \subset R$ ideal $S^{-1}\mathfrak{a} \subset S^{-1}R$ é $\mathfrak{a}S^{-1}R$

2. $$S^{-1}(\mathfrak{a}M) = \mathfrak{a}(S^{-1}M) = S^{-1}\mathfrak{a}\,(S^{-1}M)$$
$$= (\mathfrak{a}S^{-1}R)(S^{-1}M)$$

Teorema: $S^{-1}M$ é um objeto inicial na categoria dos $S^{-1}R$-módulos com um R-morfismo a partir de M:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi_S"] \arrow[dr, "\psi"'] & S^{-1}M \arrow[d, dashed] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & \exists!\, \bar{\psi} \in \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, N) \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

$N \in S^{-1}R$

ψ R-linear

<u>Exemplo</u>: $M = R^{\oplus \Lambda} \Rightarrow S^{-1}M = (S^{-1}R)^{\oplus \Lambda}$.

<u>Functorialidade</u>: $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ induz

$S^{-1}\alpha : S^{-1}M \to S^{-1}N$:

$$S^{-1}\alpha\left(\frac{m}{s}\right) := \frac{\alpha(m)}{s}$$

$\therefore M \longmapsto S^{-1}M$ é um funtor

de R-mod $\longrightarrow$ $S^{-1}R$ - mod

<u>Teorema</u>: $S^{-1}(\cdot)$ é adjunto à esquerda da restrição de escalares de $S^{-1}R$-mod para R-mod.

<u>Dem</u>: PU de localização de módulos. $\boxtimes$

<u>Cor</u>: $S^{-1}(\cdot)$ preserva limites diretos.

Cor.: $S^{-1}(\cdot) = S^{-1}R \otimes_R \cdot$

Dem.: Teorema de Watts ou PU. $\boxtimes$

Exemplo: $S^{-1}(R^{\oplus \Lambda}) = S^{-1}R \otimes_R (R^{\oplus\Lambda})$

$$= (S^{-1}R \otimes_R R)^{\oplus \Lambda} = (S^{-1}R)^{\oplus\Lambda}.$$

Def.: Dado um submódulo $N \subset M$, define-se a sua $(S-)$ saturação como

$$N^S := \{ m \in M \mid \exists_{s \in S} : sm \in N \}$$

Temos $N^S \subset M$ é submódulo e $N \subset N^S$. Se $N = N^S$, diz-se que N é $(S-)$ saturado.

Exemplo: $R = \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ primo

$S = S_p = \{1, p, \dots, p^n, \dots\}$,

$M = \mathbb{Q}$, $N = \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow N^S = \mathbb{Z}_p = \left\{ \frac{r}{p^n} \,\middle|\, r \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Prop: Sejam $S, T \subset R$ mult., $N, P \subset M$ R-submódulos e $K \subset S^{-1}M$ $S^{-1}R$-submod.

Temos

(1) (a) N^S é submódulo (b) $S^{-1}N$ é submódulo de $S^{-1}M$.

(2) (a) $\varphi_S^{-1}K$ é saturado (b) $K = S^{-1}(\varphi_S^{-1}K)$

(3) (a) $\varphi_S^{-1}(S^{-1}N) = N^S$; em particular $\ker \varphi_S = 0^S$

(b) $S^{-1}N = S^{-1}N^S$

(4) (a) $(N^S)^T = N^{ST}$ (b) $S^{-1}(S^{-1}N) = S^{-1}N$

(5) $N \subset P \Rightarrow$ (a) $N^S \subset P^S$ (b) $S^{-1}N \subset S^{-1}P$

(6) (a) $(N \cap P)^S \supset N^S \cap P^S$ (b) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$

(7) (a) $(N+P)^S \supset N^S + P^S$ (b) $S^{-1}(N+P) = S^{-1}N + S^{-1}P$

(8) $S \subset T \Rightarrow N^S \subset N^T$

<u>Exemplo</u>: $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $S = S_2 = \{1, 2, \ldots, 2^k, \ldots\}$

$N = \langle (1,2) \rangle$ $P = \langle (3,4) \rangle$, $N^S = N$

$P^S = P$

$(2,2) \in N + P \Rightarrow (1,1) \in (N+P)^S$

mas $(1,1) \notin N^S + P^S = N + P$.

<u>Dem</u>: (1) $i : N \hookrightarrow M$ inclusão

$$S^{-1}i\left(\frac{n}{s}\right) = 0 \iff \frac{n}{s} = 0 \text{ em } S^{-1}M$$

$$\iff \exists s' \in S : s'n = 0 \iff \frac{n}{s} = 0 \text{ em } S^{-1}N.$$

NB: Se $j : N' \to M'$ é R-morfismo

injetivo, segue $S^{-1}j : S^{-1}N' \to S^{-1}M'$ é injetivo.

2(a) $x \in (\varphi_S^{-1} K)^S \Leftrightarrow$

$\exists s' \in S : \varphi_S(s'x) \in K$

$\Leftrightarrow \frac{s'x}{1} \in K$

$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{s'} \frac{s'x}{1} \in K$

$\therefore x \in \varphi_S^{-1} K.$

$\boxtimes$

Teorema: $S^{-1}(\cdot)$ é exato.

Dem.: $S^{-1}(\cdot)$ preserva monomorfismos e limites diretos. $\boxtimes$